3.1 Η Αρχή της υπέρθεσης (ή της επαλληλίας)

3.1.1 Γενική διατύπωση

3.1.2 Εύρος ισχύος της αρχής της υπέρθεσης

3.1.3 Μαθηματικές συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης

3.1 Η Αρχή της υπέρθεσης (ή της επαλληλίας)

3.1.1 Γενική διατύπωση

Η αρχή της υπέρθεσης (αναλυτικότερα, αρχή της γραμμικής υπέρθεσης) είναι μια εξαιρετικά σημαντική αρχή για τη μελέτη των κυμάτων(1), η οποία έχει το προνόμιο να δίδει πληροφορίες για το εξεταζόμενο φαινόμενο ακόμη και... όταν δεν ισχύει(!).

Η αρχή της γραμμικής υπέρθεσης "γεννήθηκε" από την παρατήρηση ότι τα κύματα μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να καταστραφούν ή να αλλοιωθούν, με την έννοια ότι μετά από αυτή τη διάβαση, εμφανίζονται και πάλι, και το καθένα συνεχίζει να διαδίδεται ως εάν δεν είχε υπάρξει το άλλο. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε κατ' αρχήν από τον Leonardo da Vinci (1452-1519), στα υδάτινα κύματα(2). Η ***αρχή της υπέρθεσης*** είναι γενικότερη από την ανωτέρω διαπίστωση(3), και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Δύο ή περισσότερες (ομοειδείς) κυματικές διαταραχές μπορούν να διαδοθούν στον ίδιο χώρο ανεξάρτητα η μια από την άλλη.

Το ακριβές (μαθηματικό) νόημα αυτής της διατύπωσης είναι ότι, εάν οι κυματικές διαταραχές

$$y_1(\boldsymbol{x},t), \quad y_2(\boldsymbol{x},t), \ldots, \quad y_N(\boldsymbol{x},t)$$

διαδίδονται στην ίδια περιοχή D του χώρου, κατά το ίδιο χρονικό διάστημα I, τότε η συνολική διαταραχή $y(\boldsymbol{x},t)$ που αναπτύσσεται (μετράται) στην περιοχή D, κατά το χρονικό διάστημα I, δίδεται από τη σχέση

$$y(\boldsymbol{x},t) = y_1(\boldsymbol{x},t) + y_2(\boldsymbol{x},t) + \ldots + y_N(\boldsymbol{x},t). \tag{1}$$

Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για βαθμωτά όσο και για διανυσματικά μεγέθη (όταν βέβαια ισχύει η αρχή της υπέρθεσης).

Η ***αρχή της υπέρθεσης είναι*** ουσιαστικά ***ισοδύναμη*** με τη ***γραμμικότητα του αντιστοίχου κυματικού φαινομένου***. Υπό αυτή την έννοια μπορεί να διατυπωθεί και στην ακόλουθη μορφή, ως συνθήκη γραμμικότητας του φυσικού συστήματος:

Εάν κάθε μια από τις διεγέρσεις f_n, $n = 1,2,\ldots,N$, δημιουργεί (όταν δρα μόνο αυτή) την κυματική διαταραχή $y_n(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x} \in D$, $t \in I$, τότε η διέγερση

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_N f_N, \quad \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \tag{2α}$$

η οποία προκύπτει από ταυτόχρονη δράση των επί μέρους διεγέρσεων (επί τους αντιστοίχους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες) δημιουργεί την κυματική διαταραχή

(1) Αλλά και κάθε είδους στατικών και δυναμικών φαινομένων.

(2) Η πειραματική επαλήθευση του φαινομένου στην περίπτωση των υδατίνων κυμάτων είναι πολύ εύκολη. Δεν χρειάζεται παρά να ρίξετε δύο πέτρες (σε κάποια λογική απόσταση μεταξύ τους) σε ήρεμη θάλασσα, και να παρατηρήσετε τη διάδοση και την αλληλεπίδραση των αποκλινόντων κυλινδρικών κυμάτων που δημιουργούνται.

(3) Η οποία, σημειωτέον, ισχύει και σε ορισμένες περιπτώσεις μη-γραμμικών κυμάτων, όπου δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης με τη γενική διατύπωση η οποία δίδεται στη συνέχεια.

$$y(\boldsymbol{x},t) = \alpha_1 y_1(\boldsymbol{x},t) + \alpha_2 y_2(\boldsymbol{x},t) + \ldots + \alpha_N y_N(\boldsymbol{x},t). \tag{2β}$$

Πρέπει να τονισθεί ότι η αρχή της υπέρθεσης ***δεν ισχύει για όλα τα κυματικά φαινόμενα***. (Ισοδυνάμως: ***δεν είναι όλα τα κυματικά φαινόμενα γραμμικά***). Η μη-ισχύς της αρχής της υπέρθεσης μας δίδει λοιπόν την (πολύ σημαντική) πληροφορία ότι το αντίστοιχο φαινόμενο είναι μη-γραμμικό. Γι' αυτό το λόγο αναφέραμε στην αρχή ότι η αρχή αυτή "... δίδει πληροφορίες για το εξεταζόμενο φαινόμενο ακόμη και... όταν δεν ισχύει".

3.1.2 Εύρος ισχύος της αρχής της υπέρθεσης

Κατά κανόνα, κάθε φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί (κατά προσέγγιση) γραμμικό, εφ' όσον η αντίστοιχη διαταραχή παραμένει επαρκώς μικρή. Επί παραδείγματι, τα υδάτινα κύματα μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά, εφ' όσον η κλίση θ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού παραμένει μικρή ($\theta(rad) << 1$). Επίσης, τα ακουστικά και τα ελαστικά κύματα μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά, εφ' όσον οι αντίστοιχες διαταραχές είναι αρκετά μικρού εύρους (ώστε να αποφεύγεται η γεωμετρική μη-γραμμικότητα) και, ταυτόχρονα, ισχύει ο νόμος αναλογίας τάσεων παραμορφώσεων (νόμος Hooke)[(4)].

Ορισμένα κυματικά φαινόμενα θεωρούνται ***εγγενώς γραμμικά***. Αυτό σημαίνει ότι οι φυσικοί νόμοι (άρα και οι μαθηματικές εξισώσεις) που διέπουν τα φαινόμενα αυτά είναι γραμμικοί στην πλήρη διατύπωσή τους, και δεν προκύπτουν με γραμμικοποίηση άλλων, γενικότερων, νόμων. Τέτοια είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό (όχι όμως σε διηλεκτρικά μέσα!), καθώς και τα κύματα πιθανότητας στην κβαντομηχανική.

Τα υδάτινα, τα ακουστικά, τα ελαστικά και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (τα τελευταία όταν διαδίδονται σε διηλεκτρικά μέσα), εμφανίζουν απόκλιση από την αρχή της υπέρθεσης, εφ' όσον το εύρος της διαταραχής είναι σχετικά μεγάλο. Η ***επίδραση της μη-γραμμικότητας*** μπορεί να είναι είτε ***ασθενής*** (οπότε η προκύπτουσα κυματική διαταραχή αφίσταται ελαφρά από την αναμενόμενη μέσω της αρχής της υπέρθεσης), είτε ***ισχυρά*** (οπότε εμφανίζονται τελείως καινούργιοι χαρακτήρες, οι οποίοι ουδεμία σχέση έχουν με ότι αναμένεται βάσει της αρχής της υπέρθεσης). Παραδείγματα ισχυρώς μη-γραμμικών φαινομένων, ποιοτικά διαφορετικών απ' ότι αναμένεται βάσει της αρχής της υπέρθεσης, είναι: η θραύση των υδατίνων κυμάτων, η ηλεκτρική εκκένωση στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, και η κατάρευση (θραύση) των στερεών σωμάτων δια της οποίας διαδίδονται ελαστικά κύματα μεγάλου εύρους.

3.1.3 Μαθηματικές συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης

Για να συζητήσουμε τις μαθηματικές συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης είναι σκόπιμο να δώσουμε μια γενική αναπαράσταση των κυματικών εξισώσεων που είναι συμβατές με αυτήν (δηλαδή, των γραμμικών κυματικών εξισώσεων). Χωρίς να επιδιώξουμε "απόλυτη" γενικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια αρκετά γενική μορφή γραμμικής κυματικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη[(5)]

$$P\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3}\right) y(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t), \tag{1}$$

[(4)] Ο οποίος, κατά κανόνα, ισχύει στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων.

[(5)] Η μορφή αυτή δεν καλύπτει μη-τοπικές επιδράσεις, οι οποίες μοντελοποιούνται με τη μορφή ολοκληρωτικών όρων και οδηγούν σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Παρ' όλα αυτά, τα συμπεράσματα του παρόντος υποεδαφίου ισχύουν και σε αυτές τις περιπτώσεις.

όπου $P(z_0,z_1,z_2,z_3)$ είναι πολυώνυμο ως προς z_0,z_1,z_2,z_3, με συντελεστές γνωστές συναρτήσεις των $\boldsymbol{x}$ και t, οι οποίες δεν εξαρτώνται κατά κανένα τρόπο (άμεσο ή έμμεσο) από το άγνωστο πεδίο $y=y(\boldsymbol{x},t)$[6]. Οι δυνάμεις των ορισμάτων του πολυωνύμου P ερμηνεύονται ως παράγωγοι αντιστοίχου τάξεως. Επί παραδείγματι, εάν το αντιπροσωπευτικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$P(z_0,z_1,z_2,z_3)=z_0^2-a_1^2z_1^2-a_2^2z_2^2-a_3^2z_3^2,$$

τότε το αριστερά μέλος της (1) παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{\partial^2\bullet}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2\bullet}{\partial x_1^2}-a_2^2\frac{\partial^2\bullet}{\partial x_2^2}-a_3\frac{\partial^2\bullet}{\partial x_3^2}\right)y(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1}-a_2^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}-a_3^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2},$$

και άρα η εξίσωση (1) γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1}-a_2^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}-a_3^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}=f(\boldsymbol{x},t),$$

η οποία αποτελεί μια γενίκευση της εξίσωσης D' Alembert (και ταυτίζεται με την τελευταία όταν $a_1=a_2=a_3=\sigma\tau\alpha\theta.$).

Οι ποσότητες a_i, $i=1,2,3$, μπορεί να είναι σταθερές ή συναρτήσεις των $\boldsymbol{x},t$, πρέπει όμως να είναι ανεξάρτητες του άγνωστου κυματικού πεδίου $y(\boldsymbol{x},t)$.

Μια εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα της εξίσωσης (1) είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 1: Εάν η διέγερση $f(\boldsymbol{x},t)$ της εξίσωσης (1) είναι χρονικά αρμονική με κυκλική συχνότητα ω, δηλαδή εάν

$$f(\boldsymbol{x},t)=Re\left\{\overset{o}{f}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\}, \tag{2}$$

όπου $j=\sqrt{-1}$ είναι η μιγαδική μονάδα, τότε και η απόκριση $y(\boldsymbol{x},t)$ είναι χρονικά αρμονική με την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

Η ανωτέρω πρόταση αποδεικνύεται ως εξής. Αναζητούμε λύση της εξίσωσης (1) της μορφής

$$y(\boldsymbol{x},t)=Re\left\{\overset{o}{y}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\}. \tag{3}$$

Εισάγοντας την τελευταία στην (1), έχουμε

[6] Η εξίσωση (1) θεωρείται, χάριν απλότητος, βαθμωτή. Εν τούτοις, όλες οι συνέπειες οι οποίες αναπτύσσονται στη συνέχεια αυτού του υποεδαφίου ισχύουν εξ ίσου και στην περίπτωση διανυσματικών κυματικών εξισώσεων, δηλαδή συστημάτων εξισώσεων της μορφής (1).

$$P\left(\frac{\partial\bullet}{\partial t},\frac{\partial\bullet}{\partial x_1},\frac{\partial\bullet}{\partial x_2},\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}\right)\cdot Re\left\{\overset{o}{y}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\} = Re\left\{\overset{o}{f}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad Re\left\{P\left((-j\omega),\frac{\partial\bullet}{\partial x_1},\frac{\partial\bullet}{\partial x_2},\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}\right)\cdot \overset{o}{y}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\} = Re\left\{\overset{o}{f}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\}\right\}.$$

Αγνοώντας τα $Re\{\ \}$, παίρνουμε

$$P\left((-j\omega),\frac{\partial\bullet}{\partial x_1},\frac{\partial\bullet}{\partial x_2},\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}\right)\cdot \overset{o}{y}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\} = \overset{o}{f}(\boldsymbol{x})\cdot exp\{-j\omega t\},$$

εκ της οποίας, απαλείφοντας τον εκθετικό όρο (ο οποίος είναι πάντοτε διάφορος του μηδενός), καταλήγουμε στην ακόλουθη (ανεξάρτητη του χρόνου) εξίσωση

$$P\left((-j\omega),\frac{\partial\bullet}{\partial x_1},\frac{\partial\bullet}{\partial x_2},\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}\right)\cdot \overset{o}{y}(\boldsymbol{x}) = \overset{o}{f}(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

Η τελευταία είναι μια (μερική) γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τις χωρικές μεταβλητές, η λύση της οποίας προσδιορίζει το άγνωστο πεδίο $\overset{o}{y}(\boldsymbol{x})$. Τότε, η σχέση (3) ορίζει μια λύση της (1) η οποία ικανοποιεί τις επιθυμητές απαιτήσεις, είναι δηλαδή χρονικά αρμονική με κυκλική συχνότητα ω. Κατά κανόνα η εξίσωση (4) δέχεται μοναδική λύση, οπότε η (3) ορίζει τότε <u>την</u> λύση του προβλήματος (1), στην περίπτωση χρονικά αρμονικής διέγερσης της μορφής (2). Ας σημειωθεί ότι η απόδειξη ***θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας*** της λύσης της εξίσωσης (4) είναι συχνά μια δύσκολη υπόθεση, η οποία απαιτεί ειδική μελέτη κατά περίπτωση.

Άμεση συνέπεια της αρχής της υπέρθεσης και της Πρότασης 1 είναι η ακόλουθη

Πρόταση 2: Εάν η διέγερση $f(\boldsymbol{x},t)$ της εξίσωσης (1) είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο T, τότε και το παραγόμενο κυματικό πεδίο (απόκριση) $y(\boldsymbol{x},t)$ θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με την ίδια περίοδο T.

Η απόδειξη βασίζεται στην ανάλυση της διέγερσης σε σειρά Fourier (ως προς το χρόνο), την εφαρμογή της Προτάσεως 1 για κάθε όρο της σειράς Fourier της διέγερσης, και την εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης για την κατασκευή της τελικής λύσης.

Γενικώς, η ισχύς της αρχής της υπέρθεσης επιτρέπει την ανάλυση ενός περίπλοκου κυματικού φαινομένου σε απλά στοιχειώδη κύματα (π.χ., με τη βοήθεια σειρών ή ολοκληρωμάτων Fourier), τη μελέτη των επί μέρους απλούστερων προβλημάτων και, τέλος, τη σύνθεση της λύσης του αρχικού προβλήματος με γραμμική υπέρθεση. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται ευρύτατα στη μελέτη των γραμμικών κυματικών φαινομένων.